E.N.S.I. DE CHIMIE groupes Nord & Sud 1983

Option TB

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (4 h)

On épargne au candidat le calcul (classique et facile) des intégrales.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\, dx.$$

Les formules $I_n = \pi \times \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$ et $J_n = \dfrac{2^{2n} \times (n!)^2}{(2n+1)!}$

(pour n entier $\geqslant 0$); rappel : $0! = 1$) lui sont fournies afin qu'il s'en serve au besoin.

I

1° Démontrer qu'il est possible de choisir les nombres α_n (pour n entier $\geqslant 0$) et R réel > 0 de telle manière que $\alpha_0 = 1$, que la série entière de terme général $\alpha_n x^{2n+1}$ ait pour rayon de convergence R et que, pour $x \in]-R, +R[$, sa somme $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^{2n+1}$ vérifie la relation : $(1 - x^2) A''(x) - x A'(x) = 0$.

Plus précisément on calculera le nombre $\lambda_n = \dfrac{(2n+1)\alpha_n}{I_n}$ $\left(\text{on pourra chercher d'abord } \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)$ puis le rayon R. On aura ainsi $\alpha_n = \dfrac{\lambda_n I_n}{2n+1}$.

2° Trouver $A(x)$ en termes finis (en utilisant les relations $(1 - x^2) A''(x) - x A'(x) = 0$, $A(0) = 0$, $A'(0) = \alpha_0$) pour $|x| < R$.

Remarque : Pour x *fixe* $\in]-R, +R[$ la somme $A_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k x^{2k+1}$ tend vers $A(x)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

II

1° Démontrer qu'il est possible de choisir les nombres β_n (pour n entier $\geqslant 0$) et R' réel > 0 de telle manière que $\beta_0 = 1$, que la série entière de terme général $\beta_n x^{2n+2}$ ait pour rayon de convergence R' et que, pour $x \in]-R', +R'[$, sa somme $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^{2n+2}$ vérifie la relation $(1 - x^2) B''(x) - xB'(x) - 2 = 0$.

Plus précisément, on calculera le nombre $\mu_n = \dfrac{(n+1)\beta_n}{J_n}$ (on pourra chercher d'abord $\dfrac{\mu_{k+1}}{\mu_k}$ puis le rayon R'). On aura ainsi $\beta_n = \dfrac{\mu_n J_n}{n+1}$.

2° Trouver $B(x)$ en termes finis.

Remarque : Pour x *fixe* $\in]-R', +R'[$ la somme $B_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \beta_k x^{2k+2}$ tend vers $B(x)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

III

Dans ce III, t est un nombre réel *variable* $\in [0, +\infty[$ et n est un entier naturel.

On pose $P_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} \dfrac{(-1)^k t^{k+1}}{k+1}$ et $Q_n(t) = \sum_{k=0}^{2n+1} \dfrac{(-1)^k t^{k+1}}{k+1}$.

1° On pose $f_n(t) = \text{Log}(1+t) - P_n(t)$.

a. Simplifier $(1+t) f'_n(t)$.

b. Trouver les signes de $f'_n(t)$ puis de $f_n(t)$ (pour $t \geqslant 0$).

2° On pose $g_n(t) = \text{Log}(1+t) - Q_n(t)$.

a. Simplifier $(1+t) g'_n(t)$.

. . . /. . .

b. Trouver les signes de $g_n(t)$ puis de $g_n(t)$.

3° Ranger dans l'ordre croissant (au sens large) les nombres $\text{Log}(1+t)$, $P_n(t)$, $Q_n(t)$.

IV

Soit ρ un nombre réel fixe $\in [0, 1[$ $(0 < \rho < 1)$.

Soit φ la fonction définie, sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(x) = \dfrac{\text{Log}(1+\rho\cos x)}{\cos x}$ si $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{Log}(1+\rho\cos x)}{\cos x} = \rho$. Cette fonction est *continue* sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On pose

$$\Delta(\rho) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log}(1+\rho\cos x)}{\cos x}\,dx$$

la dernière intégrale étant impropre.

1° Pour x réel $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et n entier $\geqslant 0$, ranger dans l'ordre croissant (au sens large) les nombres

$$\varphi(x), \qquad \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k \rho^{k+1} \cos^k x}{(k+1)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k \rho^{k+1} \cos^k x}{(k+1)}.$$

(On pourra distinguer les cas : $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.)

2° Calculer et simplifier :

a. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k \rho^{k+1} \cos^k x}{k+1} \right) dx - \frac{\pi}{2} A_n(\rho) + \frac{1}{2} B_{n-1}(\rho)$$

b. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k \rho^{k+1} \cos^k x}{k+1} \right) dx - \frac{\pi}{2} A_n(\rho) + \frac{1}{2} B_n(\rho)$$

(A_n, B_{n-1}, B_n ayant été définies dans les remarques des § I et II).

3° Ranger dans l'ordre croissant (au sens large) les nombres $\Delta(\rho)$, $\frac{\pi}{2} A_n(\rho) - \frac{1}{2} B_{n-1}(\rho)$ et $\frac{\pi}{2} A_n(\rho) - \frac{1}{2} B_n(\rho)$.

En déduire $\Delta(\rho)$.

V

Comme dans la partie précédente, ρ est une constante réelle $\in [0, 1[$,

$$\varphi(x) = \frac{\text{Log}(1+\rho\cos x)}{\cos x} \text{ pour } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \rho \quad \text{et} \quad \Delta(\rho) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Log}(1+\rho\cos x)}{\cos x}\,dx.$$

On considère, dans le plan Oxy, le rectangle E : $\left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \rho\right)$.

$\dfrac{1}{1+y\cos x}$ est, sur E, une fonction continue du point $M(x, y)$.

1° Calculer $\iint\limits_E \dfrac{1}{1+y\cos x}\,dx\,dy$ en intégrant d'abord par rapport à y puis par rapport à x.

2° Calculer $\iint\limits_E \dfrac{1}{1+y\cos x}\,dx\,dy$ en intégrant d'abord par rapport à x puis par rapport à y.

On adoptera les variables d'intégration auxiliaires $t = \text{tg}\,\dfrac{x}{2}$, $u = \sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}}\,t$ puis $\theta = \text{Arc cos}\,y$.

3° On peut, du 1° et du 2° qui précèdent, déduire $\Delta(\rho)$; le résultat est-il conforme à celui du IV. 3°? Justifier la réponse.

FIN